Министерство науки и высшего образования

Российской Федерации

**Братский педагогический колледж**

федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования

«Братский государственный университет»

# МАТЕМАТИКА

## Методические рекомендации по темам «Многогранники» и «Тела вращения»

для студентов I курса
очной и заочной форм обучения
специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование
44.02.01 Дошкольное образование
40.02.01 Право и организация социального обеспечения

Автор: Е.А. Пичугина

**Братск, 2021**

Математика. Методические рекомендации по темам «Многогранники» и «Тела вращения» / Сост. Е.А. Пичугинаа – Братск.: БПК ФГБОУ ВО «БрГУ», 2021 г. – 18 с.

В методических рекомендациях предлагаются теоретический материал по темам «Многогранники» и «Тела вращения». Предназначено для студентов изучающих математику, в качестве справочного материала и может быть использовано для работы в аудитории под руководством преподавателя, так и при самостоятельной подготовки.

Печатается по решению научно-методического совета
Братского педагогического колледжа ФГБОУ ВО «БрГУ»
665709, г. Братск, ул. Макаренко 40

# СОДЕРЖАНИЕ

# ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Главной целью усовершенствования образования является улучшение его доступности, качества и результативности. Все это ведет к конкретному и верному подходу.

Главной целью обучения является обеспечение обучающихся гарантированным уровнем математической подготовки, вне зависимости от специальности, которую он выбрал. Поэтому изучение тем «Многогранники» и «Тела вращения», является одним из основных и важных этапов в системе образования.

Темы «Многогранники» и «Тела вращения» играют одну из главных ролей в стереометрии. Эти темы представляют собой насыщенный предмет исследования и изучения, очень насыщены информацией для развития пространственного представления, для развития живого пространственного мышления. Так же нельзя забывать, что изучение «Многогранников» и «Тел вращения» позволяет развить у обучающихся абстрактное мышление, удовлетворить познавательную активность, что в наше время является очень актуальным.

## Понятие многогранника и его элементов.

**Многогранник-** это тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его **гранями**. При этом предполагается, что никакие две соседние грани многогранника не лежат в одной плоскости

Стороны граней называются **рёбрами**, а концы рёбер - **вершинами** многогранника.

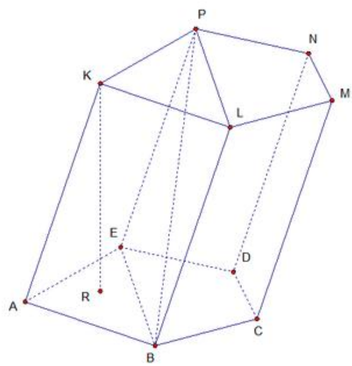
Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника.

Многогранник называется **выпуклым**, если он весь лежит по одну сторону от плоскости любой его грани.

Две плоскости называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Прямую называют **перпендикулярной к плоскости**, если она перпендикулярна к любой прямой в этой плоскости.




**Многогранник** называется **правильным**, если все его грани - равные правильные многоугольники, а все многогранные углы имеют одинаковое число граней. Все ребра правильного многогранника - равные отрезки, все плоские углы правильного многогранника также равны.

**Призма -** многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки многоугольников.

- основания призмы равны.
- у призмы основания лежат в параллельных плоскостях.
- у призмы боковые ребра параллельны и равны.

Основания ABCDE, KLMNP

Боковые грани - все грани, кроме оснований. ABLK, BCML, CDNM, DEPN, EAKP

Боковые ребра AK, BL, CM, DN, EP

Высота KR

Диагональ BP

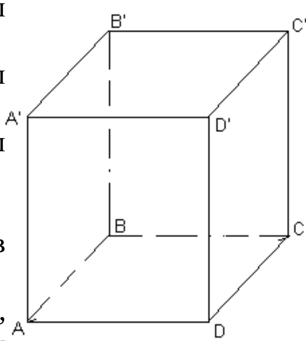
Диагональное сечение EBLP

У прямых призм все боковые грани - прямоугольники. Боковые ребра прямой призмы перпендикулярны к плоскостям её оснований.

Если из любой точки одного основания провести перпендикуляр к другому основанию призмы, то этот перпендикуляр называют **высотой** призмы.

Призма называется прямой, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. В противном случае призма называется наклонной.

Прямая призма называется правильной, если ее основания являются правильными многоугольниками.




- Основания правильной призмы являются правильными многоугольниками.
- Боковые грани правильной призмы являются равными прямоугольниками.
- Боковые ребра правильной призмы равны.
- Правильная призма является прямой.

Основные формулы для расчётов в призмах:

- Боковая поверхность Sбок.=Pосн.*H, где H- высота призмы. Для наклонных призм площадь каждой боковой грани определяется отдельно.
- Полная поверхность Sполн.=2·Sосн.+Sбок..
- Объём V=Sосн.*H.

## Параллелепипед

Если основание призмы есть параллелограмм, то она называется **параллелепипедом**. У параллелепипеда все грани - параллелограммы.

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противоположными.

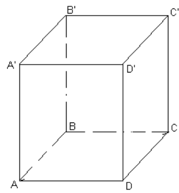
Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется прямоугольным параллелепипедом. У прямоугольного параллелепипеда все грани - прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется кубом.

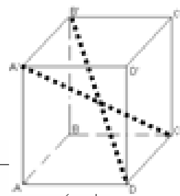
Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его линейными размерами или измерениями. У прямоугольного параллелепипеда их три: длина, ширина, высота.

Центр симметрии прямоугольного параллелепипеда - точка пересечения его диагоналей.

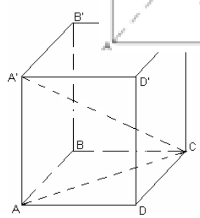
**Теорема 1**. У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны. AA\`BB\`=DD\`CC\`, AA\`BB\`|| DD\`CC\`




**Теорема 2.** Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. A\`O = OC, B\`O = OD

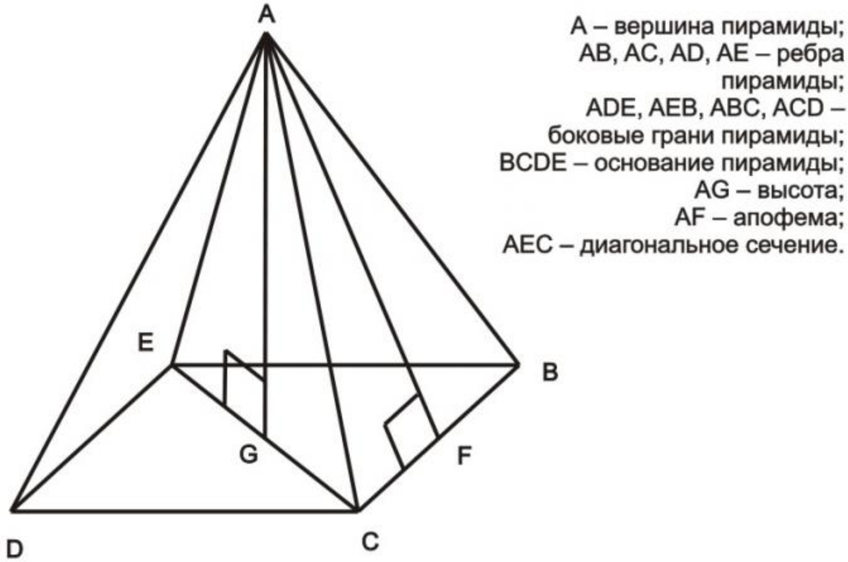


**Теорема 3**. В прямоугольном параллелепипеде квадрат диагонали равен сумме квадратов трех его измерений. $A`C^2 = A`A^2 + АД^2 + ДС^2$.

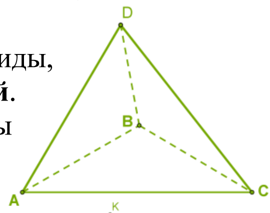



**Пирамида**

**Пирамида** - многогранник, который состоит из плоского многоугольника - основания пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания - вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.



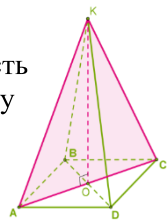

Пирамиду, в основании которой правильный многоугольник и высота соединяет вершину пирамиды с центром правильного многоугольника, называют **правильной**. У правильной пирамиды все боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Если провести высоты этих треугольников, то они также будут равны.




Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется **апофемой**.

Если у правильной треугольной пирамиды все боковые грани — равносторонние треугольники (равные с основанием), то такую пирамиду называют **правильным тетраэдром**

Если у многоугольника в основании есть диагонали, то через эти диагонали и вершину пирамиды можно провести **диагональное сечение**.




**Основные формулы для расчётов**:

- Боковая поверхность Sбок.=Росн.·h2, где h — апофема. Для пирамид, которые не являются правильными, необходимо определить отдельно поверхность каждой боковой грани.

- Полная поверхность Sполн.=Sосн.+Sбок.

- Объём V=13·Sосн.·H, где H — высота пирамиды.

**Усеченная пирамида -** часть пирамиды, заключенная между ее основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

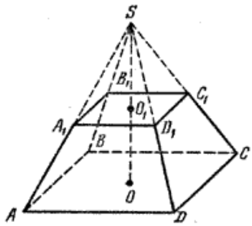


Рис. 189.

**Свойства усеченной пирамиды*:***

- Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники.
- Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции.
- Боковые ребра правильной усеченной пирамиды равны и одинаково наклонены к основанию пирамиды.
- Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные между собой равнобедренные трапеции и одинаково наклонены к основанию пирамиды.
- Двугранные углы при боковых ребрах правильной усеченной пирамиды равны.

Усеченную пирамиду, полученную из правильной пирамиды, называют **правильной**.

Высоту боковой грани правильной усеченной пирамиды называют ее **апофемой**.

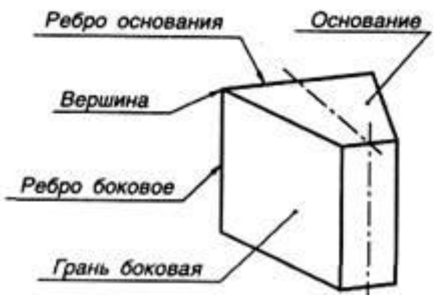
**У правильной усеченной пирамиды*:***

- Боковые грани равны; Боковые ребра равны;
- Апофемы равны; Двугранные углы при каждом основании равны; Боковые углы при боковых ребрах равны.

## Призма

***Призма*** - многогранник, две грани которого (основания призмы) представляют собой равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами, а все другие грани параллелограммы. Призма называется прямой, если её ребра перпендикулярны плоскости основания. Если основанием призмы является прямоугольник, призму называют параллелепипедом.

**Основы призмы** - две грани, которые являются равными параллельными плоскими многоугольниками




**Диагональное сечение** - это пересечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ основания призмы и боковое ребро. Треугольная призма (в основе призмы треугольники) не имеет диагональных сечений.

**Перпендикулярное сечение** - это пересечение призмы плоскостью, пересекающей боковые ребра призмы под прямым углом.

**Прямая призма** - это призма, в которой все боковые грани перпендикулярны к основанию. Высота равна длине бокового ребра.

**Наклонная призма** - это призма, в которой боковые грани не перпендикулярны к основанию.

**Правильная призма** - это призма, в которой основы являются правильными многоугольниками. Правильная призма может быть, как прямой, так и наклонной.

**Усечённая призма** - это призма, в которой две основы не параллельны. Усечённая призма может быть, как прямой, так наклонной.

**Объём призмы** через площадь основания и высоту:

$$V = S_{осн}H$$

**Объём наклонной призмы** через площадь перпендикулярного сечения и длину бокового ребра:

$$V = S_{п}L$$

**Объём правильной прямой призмы** через высоту (h), длину стороны (a) и количество сторон (n):

$$= \_\ a^2 ctg\ h\_$$

**Площадь боковой поверхности** призмы через периметр основания и высоту:

$$S_b = P \cdot h$$

**Площадь поверхности призмы** через площадь основания, периметр основания и высоту:

$$S = 2S_{осн} + P\cdot h$$

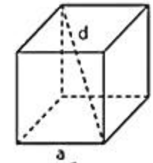
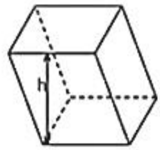
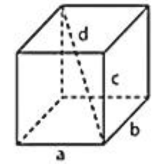
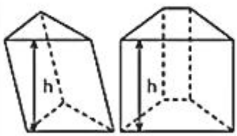
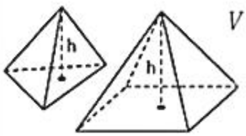
**Площадь поверхности правильной призмы** через высоту (h), длину стороны (a) и количество сторон (n):

$$= \overline{\phantom{x}}\;{}^{2}\mathrm{ctg}\;\overline{\phantom{x}} + nah$$

Основные свойства призмы:

- Основы призмы - равные многоугольники.
- Боковые грани призмы - параллелограммы.
- Боковые ребра призмы параллельны и равны между собой.
- Перпендикулярное сечение перпендикулярно всем боковым ребрам и боковым граням.
- Высота прямой призмы равна длине бокового ребра.
- Высота наклонной призмы всегда меньше длины ребра.
- В прямой призме гранями могут быть прямоугольниками или квадратами.

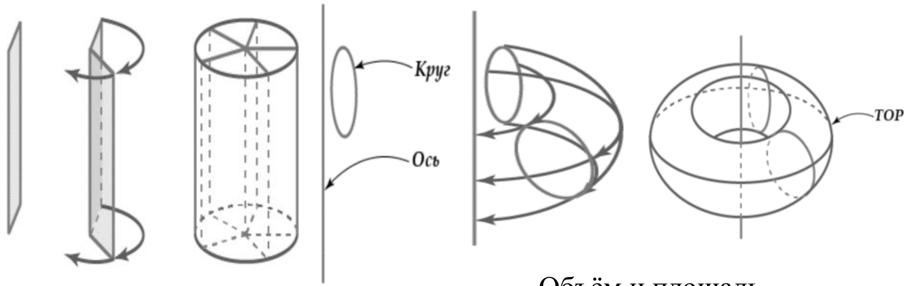
## МНОГОГРАННИКИ

| ОБЪЁМЫ | ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ |
|---|---|
|   куб <br> $V = a^3$ <br> $a$ – ребро куба | $S = 6a^2$ <br> $d = a\sqrt{3}$ <br> длина диагонали |
|   параллелепипед <br> $V = S_{осн} \cdot h$ | $S = 2S_{осн} + S_{бок}$ <br> $S_{осн}$ – площадь основания <br> $h$ – высота |
|   прямоугольный параллелепипед <br> $V = a \cdot b \cdot c$ | $S = 2ab + 2ac + 2bc$ <br> $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ |
|   призма <br> $V = S_{осн} \cdot h$ | $S = 2S_{осн} + S_{бок}$ <br> $S_{осн}$ – площадь основания <br> $h$ – высота |
|   пирамида <br> $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$ | $S = S_{осн} + S_{бок}$ |

### Тела вращения

**Тело вращения** – это тело в пространстве, которое возникает при вращении какой-нибудь плоской фигуры вокруг какой-нибудь оси.

**Поверхность вращения** –граница тела вращения.




Объём и площадь поверхности тел вращения можно также узнать при помощи **теорем Гульдина-Паппа**, которые связывают площадь или объём с центром масс фигуры.

Первая теорема Гульдина-Паппа гласит:

- Площадь поверхности, образуемой при вращении линии, лежащей в плоскости целиком по одну сторону от оси вращения, равна произведению длины линии на длину окружности, пробегаемой центром масс этой линии.

Вторая теорема Гульдина-Паппа гласит:

- Объём тела, образуемого при вращении фигуры, лежащей в плоскости целиком по одну сторону от оси вращения, равен произведению площади фигуры на длину окружности, пробегаемой центром масс этой фигуры.

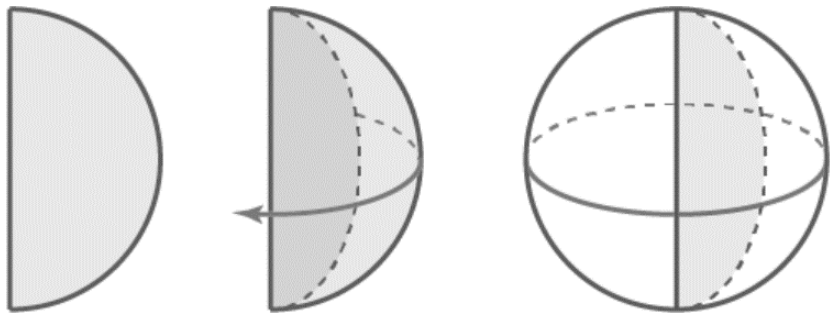
Примеры тел вращения:

- Шар
- Конус
- Цилиндр
- Тор

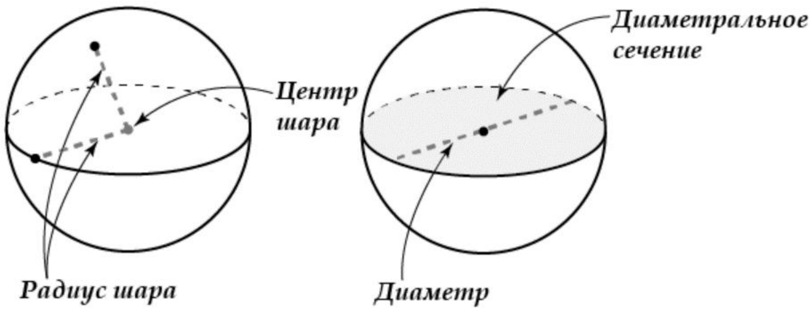
## Шар

**Шар** – тело вращения, полученное вращением полуокружности вокруг диаметра.

**Шар** – геометрическое место точек, удаленных от одной фиксированной точки на расстояние, не более заданного.



**Диаметральное сечение шара** – сечение, проходящее через центр. Это сечение иногда еще называют большим кругом.



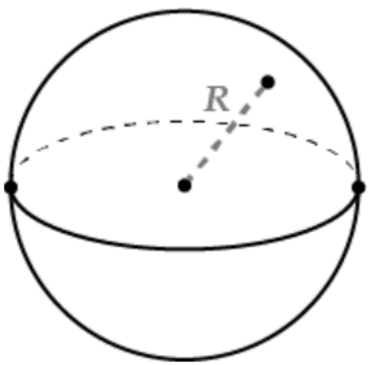

Любое сечение шара – круг.

Граница шара называется сферой. (Так же, как граница круга – окружность.)

$$S_{\text{поверхности}} = 4\pi R^2 \quad R \text{ - радиус}$$

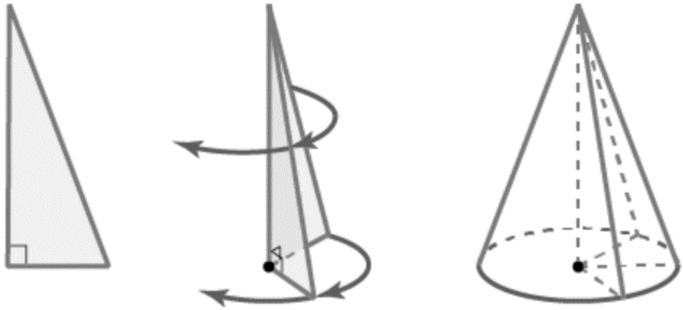
$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad R \text{ - радиус}$$

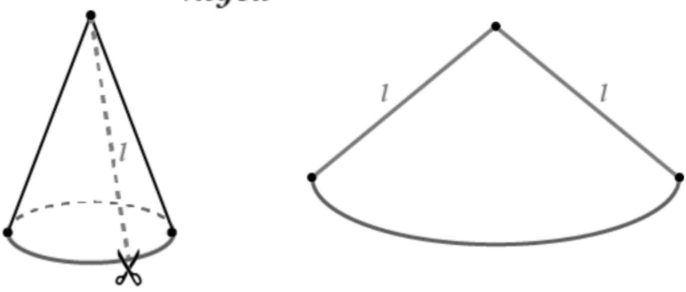
$$V'_{\text{шара}} = S_{\text{поверхности}}$$



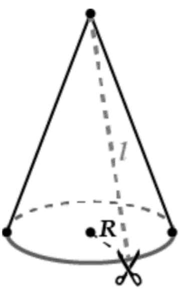
# Конус

**Конус** – тело вращения, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.

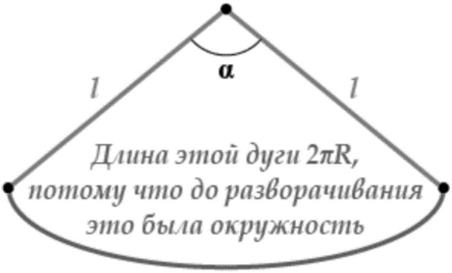



Развертка конуса – сектор круга радиуса $l$




По формуле площади сектора $S_{\text{бок.}} = l^2 \cdot \frac{\alpha}{2}$ Где $\alpha$ - угол при вершине в радианах.




–

$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$R

Sполн.=πRl+$\pi R^2$

Sбок.=πRl,

где:

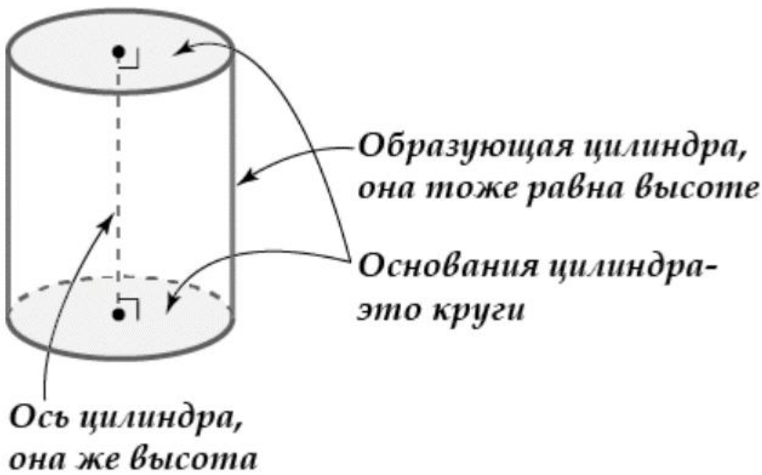
R - радиус окружности основания,

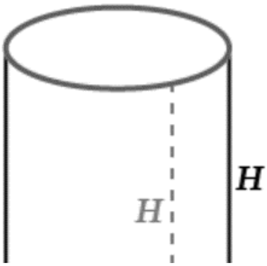
l - длина образующей

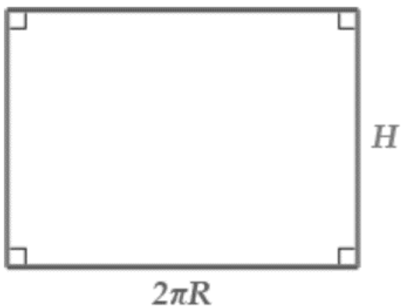
$H$ – высота

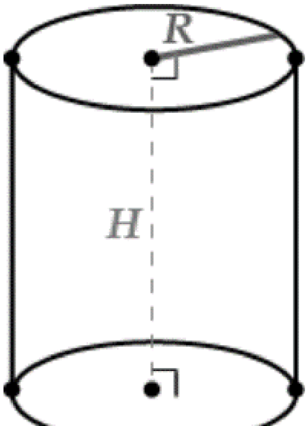
**Цилиндр**

**Цилиндр** – тело, образованное вращением прямоугольника вокруг одной из сторон.




$$S_{\text{бок.}} = 2\pi RH.$$

$$S_{\text{полн.}} = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

$V = \pi R^2 H$ $R$ - радиус основания $H$ - высота

V = S основания·H, только у призмы, пирамиды и параллелепипеда

S основания - это площадь многоугольника, а у цилиндра S основания - это площадь круга.